NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	CARRERA:

Firma

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serÃ¡n corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en **SU** sección.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus celulares.

Nota=$1+\dfrac{Puntos}{10}$.

Duración= 60 minutos

CORRECCIóN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **[20 pts.]** Considere el plano π y la recta l dados a continuación:

- $\pi : 2x + y - 4z = 1$
- $l : \dfrac{x-1}{a} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z-2}{-8}$

a) **[7 pts.]** Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la recta l sea perpendicular al plano π.

b) **[7 pts.]** Para $a = -17$ verifique si se cumple o no que la recta l pertenece al plano π. Justifíque.

c) **[6 pts.]** Para $a = 1$ determine la ecuación de la recta paralela a l y que intersecta al plano π en el punto $(0, 1, 0)$.

DESARROLLO

a) Para que la recta sea perpendicuar al plano, basta que el vector director de la recta sea paralelo al vector normal del plano, es decir

$$(2, 1, -4) /\!/ (a, 2, -8) 4pts.$$

Ahora bien para que estos vectores sean paralelos basta que uno sea multiplo de otro y eso solo sucede si $a = 4$ (3 pts.).

b) Notar que los puntos de la recta son de la forma $(-17t + 1, 2t + 7, -8t + 2)$(4 pts.), asi que si deseamos que la recta pertenezca al plano, basta verificar si estos puntos satisfacen la ecuación del plano, es decir

$$2(-17t + 1) + (2t + 7) - 4(-8t + 2) = 1$$

Lo cual se cumple, por lo que la recta si pertenece al plano. (3 pts.)

c) Buscamos una recta paralela a l, por lo que podemos usar el mismo vector director $\overrightarrow{v} = (1, 2, -8)$ (3 pts.) y si usamos el punto que nos dan del plano obtenemos que la recta buscada es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-8}$$

(3 pts.)

2) **[30 pts.]** Considere los siguiente subespacios de $\mathbb{R}^4$:

- $V = \langle (1,1,2,1),(1,-1,1,1) \rangle$
- $W = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x+y+z+w=0 \\ x-y+2z=0 \end{array} \right\}$

a) **[10 pts.]** Caracterize V y determine una base de W.

b) **[5 pts.]** Determine $V \cap W$ indicando su dimensión.

c) **[5 pts.]** ¿Es $V \oplus W = \mathbb{R}^4$? Justifíque.

d) **[10 pts.]** Encuentre vectores $v \in V$ y $w \in W$, de modo que $v + w = (3,3,0,-3)$.

DESARROLLO

a) Al caracterizar V nos queda

$$V = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} 3x+y-2z=0 \\ w-x=0 \end{array} \right\}$$

(5 pts.)
Una base de W sería $\{(1,1,0,-2),(0,2,1,-3)\}$ (5 pts.)

b) $V \cap W = \{(0,0,0)\}$ (3 pts.) por lo que su dimensión es 0. (2 pts.)

c) Sí es suma directa por el teorema de la dimensión. (5 pts.)

d) Los vectores son $u = (0,2,1,0)$ y $w = (3,1,-1,-3)$ (5 pts. por plantear el problemas+ 5 pts. por encontrar la solución)

3) **[10 pts.]** Considere el siguiente subespacio vectorial de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} a - b + c - 2d = 0 \\ a + c - d = 0 \end{array} \right\}$$

a) **[5 pts.]** Pruebe que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de V.

b) **[5 pts.]** Extienda la base B a una base de $M_{2x2}(\mathbb{R})$.

DESARROLLO

a) Claramente $\langle B \rangle$ tiene dimension 2 (son l.i.) (2 pts.) y además ambas matrices satisfacen las ecuaciones de V y como $dim(V) = 2$ es base de V.(3 pts.)

b) Basta agregar vectores l.i. a estos anteriores, una posibilidad es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(5 pts.)